Combien y a-t-il de parties de go possibles ? Et combien de parties d'échecs possibles ?

碁

François Lorrain

Reprenons une question abordée dans mon dernier article : *comment peut-on évaluer le nombre de positions différentes au go ?* Comme chacun des points du tablier (il y en a $19 \times 19 = 361$) peut être noir, blanc ou libre, le nombre de dispositions possibles de pierres sur le jeu est obtenu en multipliant 3 par 3, par 3, et ainsi de suite, 360 fois. Ce nombre s'écrit plus simplement comme ceci : 3^{361}. Il est de l'ordre de 2×10^{172}, soit un 2 suivi de 172 zéros.

Comme je le disais aussi dans mon dernier article, plusieurs de ces dispositions de pierres contiennent des groupes sans liberté, ce qui n'est pas permis au go. Le nombre de dispositions permises par les règles du go — appelons-le D — est peut-être situé entre 10^{171} et 10^{172} :

$$10^{171} < D < 10^{171}\ ?$$

Ces nombres sont immenses ; ils sont beaucoup, beaucoup plus grands que le nombre de particules dans l'univers, évalué par certains physiciens à 10^{80} (un 1 suivi de 80 zéros). Un ordinateur comptant de 1 en montant, et avançant d'un milliard par seconde depuis le début de l'univers (il y a quinze milliards d'années), ne serait même pas encore rendu aujourd'hui à 5×10^{26}, un nombre infime, comparé aux précédents !

Abordons maintenant une autre question. *Combien y a-t-il de parties de go possibles* — c'est-à-dire permises par les règles ?

Il doit y avoir beaucoup plus de parties possibles que de dispositions de pierres possibles. Par exemple, sur un tablier 1×2, seules 5 dispositions distinctes sont permises, alors que 21 parties différentes sont possibles (sous les règles néo-zélandaises).

Comment donc calculer le nombre de parties possibles sur un tablier 19×19 ? Bien entendu, ce nombre ne peut être qu'estimé, et ce très approximativement.

Rappelons d'abord que le nombre de parties possibles n'est pas infini — puisque la règle des éternités (dont il existe plusieurs variantes) interdit, grosso modo, de jouer un coup qui ramène la partie à un état du jeu qui s'est déjà produit antérieurement. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'états possibles, une partie ne peut pas durer plus qu'un certain nombre maximum de coups. Il s'ensuit que les parties possibles sont en nombre fini. Il en est de même dans d'autres jeux, comme les échecs et les dames.

Appelons G le nombre de parties de go possibles. Voyons les choses comme suit. Il y a 361 possibilités pour le premier coup, 360 possibilités pour le deuxième, 359 pour le troisième, et ainsi de suite. Menée jusqu'à la fin, une partie sensée dure généralement de 250 à 300 coups — mettons 300. Une première estimation de G pourrait donc être

$$G_1 = 361 \times (361–1) \times (361–2) \times \ldots \times (361–299).$$

Ce nombre est immensément plus grand que le nombre D calculé précédemment :

$$G_1 \approx 3 \times 10^{684}$$

(un 3 suivi de 684 zéros).

Discutons de cette estimation. D'abord elle ne tient pas compte des captures. Comme chaque capture libère des points, sur lesquels on peut jouer par la suite, *cette estimation de G devrait être un peu augmentée* — mais pas trop, car la règle des éternités interdit parfois de jouer sur certains points précédemment libérés.

Mais en fait notre estimation de G, même ainsi augmentée, serait encore trop petite. En effet, beaucoup de parties possibles, permises par les règles, sont nettement plus courtes que 300, et d'autres nettement plus longues. Notre estimation de G doit donc être encore augmentée, de beaucoup sans doute. Il y a de bonnes chances que G, le nombre total de parties de go possibles sur un tablier 19×19, soit supérieur à 10^{690}. Arrondissons :

G (le nombre de parties de go possibles)
pourrait être de l'ordre de 10^{700}.

Combien y a-t-il de parties d'*échecs* possibles ? Comme pour le go, on ne peut qu'estimer très approximativement ce nombre, que j'appellerai E.

Je propose d'utiliser les données suivantes, valables pour chaque joueur :

les 8 pions : 16 coups possibles au plus ;
les 2 tours : 28 coups possibles au plus ;
les 2 cavaliers : 16 coups possibles au plus ;
les 2 fous : 26 coups possibles au plus ;
la reine : 27 coups possibles au plus ;
le roi : 8 coups possibles au plus.

Conclusion : à chaque instant de la partie, au plus 121 coups sont possibles. Bien sûr, en réalité, le nombre de coups possibles est toujours inférieur à 121, et la plupart du temps nettement inférieur à ce nombre.

On me dit que, en moyenne, une partie d'échecs menée jusqu'au mat dure 120 coups environ (60 coups par joueur). Une première estimation de E sera

$$\begin{aligned} E_1 \;=\;& 121 \text{ possibilités au plus pour le premier coup} \\ & \times 121 \text{ possibilités au plus pour le second} \\ & \times 121 \text{ possibilités au plus pour le troisième} \\ & \times \ldots \\ & \times 121 \text{ possibilités pour le } 120^{\text{e}} \text{ coup} \\ =\;& 121^{120} \approx 9 \times 10^{249} \approx 10^{250} \end{aligned}$$

(un 1 suivi de 250 zéros).

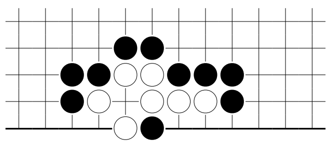
Cette estimation est trop grande, car il y a généralement beaucoup moins que 121 coups possibles à chaque instant ; il faut donc la diminuer. Toutefois, l'estimation réduite ainsi obtenue (à supposer qu'on puisse la calculer) devrait être à nouveau augmentée pour tenir compte du fait que beaucoup de parties d'échecs permises par les règles sont de longueur très supérieure à 120. Somme toute, tenons-nous en à l'estimation suivante :

E (le nombre de parties d'échecs possibles)
pourrait être de l'ordre de 10^{250}.

On constate que cette estimation de E est très inférieure à l'estimation que nous avons faite du nombre G de parties de go possibles. Ce dernier nombre est si grand qu'il est même supérieur au *carré* de E (le nombre $E \times E$) ! Cela ne prouve pas, cependant, que les échecs seraient un jeu plus facile que le go ; en effet, même si les deux nombres E et G sont très éloignés l'un de l'autre, ils sont tous deux si grands que, pour l'esprit humain, ils sont en pratique infinis. ■

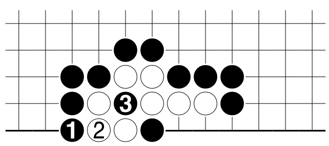
Le problème du dernier numéro

Le problème



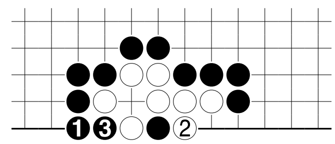
Noir a le trait.
D'un coup calme il peut tuer la formation blanche.

Solution (première séquence)



En jouant 2, Blanc se met en touche.

Solution (seconde séquence)



Après 3, Blanc n'a plus qu'un œil.

L'auteur est premier dan. Il est professeur de mathématiques au Collège Jean-de-Brébeuf, où il anime un club de go. Il a publié en 1998 le premier livre québécois sur le go, intitulé *Le go, le grand jeu de l'Orient*, disponible dans les principales librairies montréalaises. Nouvelle adresse de courriel : `florr@mac.com`